Белорусский государственный технологический университет

Кафедра Программной инженерии

**“Математическое программирование”**

**Отчет по лабораторной работе №4**

**Решение задач методом**

**Динамическое программирование**

**Вариант 8**

Выполнила: студентка 2 курса 1 группы

Самсоник Анастасия Ивановна

Минск 2023

Условие:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | 20 | 10 | 14 | 11 | 19 | 9 | 176 |
| 2 | 18 | 8 | 16 | 13 | 15 | 21 | 121 |
| 3 | 9 | 13 | 19 | 16 | 10 | 19 | 158 |
| 4 | 12 | 18 | 18 | 11 | 21 | 10 | 167 |
| 5 | 11 | 19 | 17 | 8 | 18 | 12 | 108 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 151 | 115 | 139 | 201 | 103 | 171 |  |

Для разрешимости транспортной задачи необходимо, чтобы суммарные запасы продукции у поставщиков равнялись суммарной потребности потребителей. Проверим это условие.

∑запасы = 176 + 121 + 158 + 167 + 108 = 730

∑потребности = 151 + 115 + 139 + 201 + 103 + 171 = 880

Так как запасы поставщиков меньше потребности потребителей, введем фиктивного поставщика 6, с запасом продукции равным 880-730=150. Стоимость доставки единицы продукции от фиктивного поставщика ко всем потребителям примем равной нулю.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 23 | 13 | 17 | 14 | 22 | 12 | 179 |
| 2 | 21 | 11 | 19 | 16 | 18 | 24 | 124 |
| 3 | 12 | 16 | 22 | 19 | 13 | 22 | 161 |
| 4 | 15 | 21 | 21 | 14 | 24 | 13 | 170 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 11 | 21 | 15 | 111 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 154 | 118 | 142 | 204 | 106 | 174 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | 11 | 19 | 9 | 176 |
| 2 | 18 | 8 | 16 | 13 | 15 | 21 | 121 |
| 3 | 9 | 13 | 19 | 16 | 10 | 19 | 158 |
| 4 | 12 | 18 | 18 | 11 | 21 | 10 | 167 |
| 5 | 11 | 19 | 17 | 8 | 18 | 12 | 108 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 151 | 115 | 139 | 201 | 103 | 171 |  |

Теперь выполняется условие.

Этап I

*Метод наименьшей стоимости*

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают клетку с наименьшей стоимостью, для этой ячейки присваиваем меньшее из чисел ai, или bj. Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Повторяем, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Искомый элемент равен c22=8

x22 = min(121,115) = 115.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | 11 | 19 | 9 | 176 |
| 2 | 18 | **8** | 16 | 13 | 15 | 21 | 121 – 115 = 6 |
| 3 | 9 | 13 | 19 | 16 | 10 | 19 | 158 |
| 4 | 12 | 18 | 18 | 11 | 21 | 10 | 167 |
| 5 | 11 | 19 | 17 | 8 | 18 | 12 | 108 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 151 | 115 -115 = 0 | 139 | 201 | 103 | 171 |  |

Искомый элемент равен c54=8.

x54 = min(108,201) = 108.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | 11 | 19 | 9 | 176 |
| 2 | 18 | **8|115** | 16 | 13 | 15 | 21 | 6 |
| 3 | 9 | 13 | 19 | 16 | 10 | 19 | 158 |
| 4 | 12 | 18 | 18 | 11 | 21 | 10 | 167 |
| 5 | 11 | 19 | 17 | **8** | 18 | 12 | 108 – 108 =0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 151 | 0 | 139 | 201 – 108 = 93 | 103 | 171 |  |

Искомый элемент равен c16=9.

x16 = min(176,171) = 171.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | 11 | 19 | **9** | 176 – 171 = 5 |
| 2 | 18 | **8|115** | 16 | 13 | 15 | 21 | 6 |
| 3 | 9 | 13 | 19 | 16 | 10 | 19 | 158 |
| 4 | 12 | 18 | 18 | 11 | 21 | 10 | 167 |
| 5 | 11 | 19 | 17 | **8|108** | 18 | 12 | 108 – 108 =0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 151 | 0 | 139 | 93 | 103 | 171 – 171 = 0 |  |

Искомый элемент равен c31=9.

x31 = min(158,151) = 151.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | 11 | 19 | 9|171 | 5 |
| 2 | 18 | 8|115 | 16 | 13 | 15 | 21 | 6 |
| 3 | **9** | 13 | 19 | 16 | 10 | 19 | 158-151=7 |
| 4 | 12 | 18 | 18 | 11 | 21 | 10 | 167 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 8|108 | 18 | 12 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 151-151=0 | 0 | 139 | 93 | 103 | 0 |  |

Искомый элемент равен c35=10.

x35 = min(7,103) = 7.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | 11 | 19 | 9|171 | 5 |
| 2 | 18 | 8|115 | 16 | 13 | 15 | 21 | 6 |
| 3 | **9|151** | 13 | 19 | 16 | **10** | 19 | 7-7=0 |
| 4 | 12 | 18 | 18 | 11 | 21 | 10 | 167 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 8|108 | 18 | 12 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 0 | 0 | 139 | 93 | 103-7=96 | 0 |  |

Искомый элемент равен c14=11.

x14 = min(5,93) = 5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | **11** | 19 | 9|171 | 5-5=0 |
| 2 | 18 | 8|115 | 16 | 13 | 15 | 21 | 6 |
| 3 | **9|151** | 13 | 19 | 16 | **10|7** | 19 | 0 |
| 4 | 12 | 18 | 18 | 11 | 21 | 10 | 167 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 8|108 | 18 | 12 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 0 | 0 | 139 | 93-5=88 | 96 | 0 |  |

Искомый элемент равен c44=11.

x44 = min(167,88) = 88.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | **11|5** | 19 | 9|171 | 0 |
| 2 | 18 | 8|115 | 16 | 13 | 15 | 21 | 6 |
| 3 | **9|151** | 13 | 19 | 16 | **10|7** | 19 | 0 |
| 4 | 12 | 18 | 18 | **11** | 21 | 10 | 167-88=79 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 8|108 | 18 | 12 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 0 | 0 | 139 | 88-88=0 | 96 | 0 |  |

Искомый элемент равен c25=15.

x25 = min(6,96) = 6.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | **11|5** | 19 | 9|171 | 0 |
| 2 | 18 | 8|115 | 16 | 13 | **15** | 21 | 6-6=0 |
| 3 | **9|151** | 13 | 19 | 16 | **10|7** | 19 | 0 |
| 4 | 12 | 18 | 18 | **11|88** | 21 | 10 | 79 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 8|108 | 18 | 12 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 0 | 0 | 139 | 0 | 96-6=90 | 0 |  |

Искомый элемент равен c43=18.

x43 = min(79,139) = 79.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | **11|5** | 19 | 9|171 | 0 |
| 2 | 18 | 8|115 | 16 | 13 | **15|6** | 21 | 0 |
| 3 | **9|151** | 13 | 19 | 16 | **10|7** | 19 | 0 |
| 4 | 12 | 18 | **18** | **11|88** | 21 | 10 | 79-79=0 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 8|108 | 18 | 12 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 150 |
| Потребность | 0 | 0 | 139-79=60 | 0 | 90 | 0 |  |

Искомый элемент равен c63=0.

x63 = min(150,60) = 60.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | **11|5** | 19 | 9|171 | 0 |
| 2 | 18 | 8|115 | 16 | 13 | **15|6** | 21 | 0 |
| 3 | **9|151** | 13 | 19 | 16 | **10|7** | 19 | 0 |
| 4 | 12 | 18 | **18|79** | **11|88** | 21 | 10 | 0 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 8|108 | 18 | 12 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | **0** | 0 | 0 | 0 | 150-60=90 |
| Потребность | 0 | 0 | 60-60=0 | 0 | 90 | 0 |  |

Искомый элемент равен c65=0.

x65 = min(90,90) = 90.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | **11|5** | 19 | 9|171 | 0 |
| 2 | 18 | 8|115 | 16 | 13 | **15|6** | 21 | 0 |
| 3 | **9|151** | 13 | 19 | 16 | **10|7** | 19 | 0 |
| 4 | 12 | 18 | **18|79** | **11|88** | 21 | 10 | 0 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 8|108 | 18 | 12 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | **0|60** | 0 | **0** | 0 | 90-90=0 |
| Потребность | 0 | 0 | 0 | 0 | 90-90=0 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 20 | 10 | 14 | 11|5 | 19 | 9|171 | 0 |
| 2 | 18 | 8|115 | 16 | 13 | 15|6 | 21 | 0 |
| 3 | 9|151 | 13 | 19 | 16 | 10|7 | 19 | 0 |
| 4 | 12 | 18 | 18|79 | 11|88 | 21 | 10 | 0 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 8|108 | 18 | 12 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0|60 | 0 | 0|90 | 0 | 0 |
| Потребность | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число базисных переменных. Их должно быть m + n - 1 = 11

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

F(x) = 11\*5 + 9\*171 + 8\*115 + 15\*6 + 9\*151 + 10\*7 + 18\*79 + 11\*88 + 8\*108 + 0\*60 + 0\*90 = 7287

Этап II

*Метод потенциалов*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | |
| b 1 | b 2 | b3 | b 4 | b 5 | b 6 |
| a 1 | 20 | 10 | 14 | 11|5 | 19 | 9|171 |
| a 2 | 18 | 8|115 | 16 | 13 | 15|6 | 21 |
| a 3 | 9|151 | 13 | 19 | 16 | 10|7 | 19 |
| a 4 | 12 | 18 | 18|79 | 11|88 | 21 | 10 |
| a 5 | 14 | 22 | 20 | 8|108 | 18 | 12 |
| a 6 | 0 | 0 | 0|60 | 0 | 0|90 | 0 |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 11; 0 + v4 = 11; v4 = 11  
u4 + v4 = 11; 11 + u4 = 11; u4 = 0  
u4 + v3 = 18; 0 + v3 = 18; v3 = 18  
u6 + v3 = 0; 18 + u6 = 0; u6 = -18  
u6 + v5 = 0; -18 + v5 = 0; v5 = 18  
u2 + v5 = 15; 18 + u2 = 15; u2 = -3  
u2 + v2 = 8; -3 + v2 = 8; v2 = 11  
u3 + v5 = 10; 18 + u3 = 10; u3 = -8  
u3 + v1 = 9; -8 + v1 = 9; v1 = 17  
u5 + v4 = 8; 11 + u5 = 8; u5 = -3  
u1 + v6 = 9; 0 + v6 = 9; v6 = 9

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | U |
| b 1 | b 2 | b3 | b 4 | b 5 | b 6 |
| a 1 | 20 | 10 | 14 | 11[5] | 19 | 9[171] | u1 = 0 |
| a 2 | 18 | 8[115] | 16 | 13 | 15[6] | 18 | u2 = -3 |
| a 3 | 9[151] | 13 | 19 | 16 | 10[7] | 9[151] | u3 = -8 |
| a 4 | 12 | 18 | 18[79] | 11[88] | 21 | 10 | u4 = 0 |
| a 5 | 11 | 19 | 17 | 8[108] | 18 | 12 | u5 = -3 |
| a 6 | 0 | 0 | 0[60] | 0 | 0[90] | 0 | u6 = -18 |
| V | v1=17 | v2=11 | v3=18 | v4=11 | v5=18 | v6=9 |  |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;2): 0 + 11 > 10; ∆12 = 0 + 11 - 10 = 1 > 0  
(1;3): 0 + 18 > 14; ∆13 = 0 + 18 - 14 = 4 > 0  
(4;1): 0 + 17 > 12; ∆41 = 0 + 17 - 12 = 5 > 0  
(5;1): -3 + 17 > 11; ∆51 = -3 + 17 - 11 = 3 > 0  
max(1,4,5,3) = 5  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (4;1): 12  
Для этого в перспективную клетку (4;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | 20 | 10 | 14 | 11[5] | 19 | 9[171] | 176 |
| 2 | 18 | 8[115] | 16 | 13 | 15[6] | 21 | 121 |
| 3 | 9[151]  [-] | 13 | 19 | 16 | 10[7]  [+] | 19 | 158 |
| 4 | 12[+] | 18 | 18[79]  [-] | 11[88] | 21 | 10 | 167 |
| 5 | 11 | 19 | 17 | 8[108] | 18 | 12 | 108 |
| 6 | 0 | 0 | 0[60] | 0 | 0[90]  [-] | 0 | 150 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 151 | 115 | 139 | 201 | 103 | 171 |  |

Цикл приведен в таблице (4,1 → 4,3 → 6,3 → 6,5 → 3,5 → 3,1).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 3) = 79. Прибавляем 79 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 79 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | 20 | 10 | 14 | 11[5] | 19 | 9[171] | 176 |
| 2 | 18 | 8[115] | 16 | 13 | 15[6] | 21 | 121 |
| 3 | 9[72] | 13 | 19 | 16 | 10[86] | 19 | 158 |
| 4 | 12[79] | 18 | 18 | 11[88] | 21 | 10 | 167 |
| 5 | 11 | 19 | 17 | 8[108] | 18 | 12 | 108 |
| 6 | 0 | 0 | 0[139] | 0 | 0[11 | 0 | 150 |
| ПОТРЕБНОСТИ | 151 | 115 | 139 | 201 | 103 | 171 |  |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.

Минимальные затраты составят: F(x) = 11\*5 + 9\*171 + 8\*115 + 15\*6 + 9\*72 + 10\*86 + 12\*79 + 11\*88 + 8\*108 + 0\*139 + 0\*11 = 6892

*Анализ оптимального плана.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 23 | 13 | 17 | 14|5 | 22 | 12|174 | 0 |
| 2 | 21 | 11|118 | 19 | 16 | 18|6 | 24 | 0 |
| 3 | 12|154 | 16 | 22 | 19 | 13|7 | 22 | 0 |
| 4 | 15 | 21 | 21|82 | 14|88 | 24 | 13 | 0 |
| 5 | 14 | 22 | 20 | 11|111 | 21 | 15 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0|60 | 0 | 0|93 | 0 | 0 |
| Потребность | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

Из 1-го склада необходимо груз направить к 4-у потребителю (5 ед.), к 6-у потребителю (171 ед.)  
Из 2-го склада необходимо груз направить к 2-у потребителю (115 ед.), к 5-у потребителю (6 ед.)  
Из 3-го склада необходимо груз направить к 1-у потребителю (72 ед.), к 5-у потребителю (86 ед.)  
Из 4-го склада необходимо груз направить к 1-у потребителю (79 ед.), к 4-у потребителю (88 ед.)  
Из 5-го склада необходимо весь груз направить к 4-у потребителю.  
Потребность 3-го потребителя остается неудовлетворенной на 139 ед.  
Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x63=0.  
Потребность 5-го потребителя остается неудовлетворенной на 11 ед.